OPTIMIZACIJA KOD EKONOMSKIH MODELA SA DISKRETNIM VREMENOM

OPTIMIZATION IN ECONOMIC MODEL WITH TIME DISCRETE

Dr. Hamid Drljević, profesor Grafičkog fakulteta, Kiseljak, Univerzitet u Travniku
Dr. Husein Muratović, profesor Ekonomskog fakulteta u Bihaću

Rezime

Ovaj rad razmatra iznalaženje optimizacije ekonomskih problema kod kojih je nezavisna varijabla diskretna. Neki takvi problemi mogu se reducirati na probleme maksimuma ili minimuma funkcija od n-varijabli definisane na skupu S u Rn, pri čemu su se za njihovo rješavanje upotrebljavale klasične metode kalkulusa. Cilj rada je da se za dinamičko optimizacione probleme sa diskretnim varijablama, koji će se razmatrati u ovom radu, navede opći metod rješavanja kada upotreba klasičnih metoda kalkulusa nije primjenljiva.

Ključne riječi: *dinamički modeli, optimizacija, kontrole otvorene i zatvorene petlje, kompaktan skup.*

Abstract

This paper discusses finding the optimization of economic problems for which the independent variable is discrete. Some such problems can be reduced to the problems of maximum or minimum functions of n-variables defined on the set of S in Rn, where for solving them are used the classical calculus methods. The aim of work is to state the general method of solving for dynamic optimization problems with discrete variables, which will be considered in this paper, when using classical calculus methods is not applicable.

Key words: *dynamic models, optimization, open-loop and closed-loop controls, compact set.*

Uvod

U ovom radu proučavat će se dinamičko optimizacioni problemi sa diskretnim vremenom kao nezavisno promjenljivom, što znači da se vrijeme mjeri brojem cijelih perioda (recimo nedjeljama, kvartalima ili godinama) koji polaze od vremena 0. Na taj način govorimo o diskretnom vremenu. U ovom slučaju prirodno je da se proučavaju dinamički sistemi čija se evolucija opisuje diferentnim jednačinama.

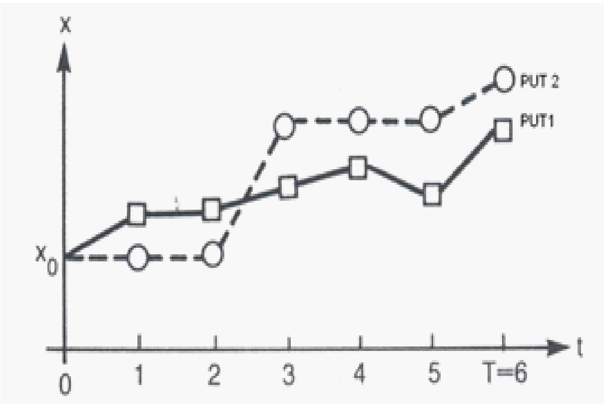
Ako je horizont posmatranja problema konačan, tada se takvi problemi mogu riješiti, u principu, upotrebom klasičnih metoda kalkulusa. Međutim, i u opštijim slučajevima postoje metode kojima se optimizacioni problemi sa diskretnim vremenom kao nezavisnom promjenljivom rješavaju.

Neka se neki sistem posmatra u vremenima t = 0, 1,...,T. Pretpostavimo da je stanje sistema u vremenu t označeno realnim brojem xt. Npr., xt može označavati količinu žita na zalihama u vremenu t. Pretpostavimo da je dato početno stanje x0, i da se od tada sistem razvija vremenom pod utjecajem niza kontrola ut , koje se mogu birati slobodno iz nekog datog skupa U, kojeg zovemo oblast kontrole. Npr., ut može označavati mali dio žita koji je uklonjen iz zaliha xt za vrijeme perioda t. Ponašanje sistema zavisi od kontrola ut i prethodnog stanja sistema. U mnogim slučajevima se evolucija sistema opisuje diferentnom jednačinom

$x_{t+1} = g(t, x_t, u_t)$, gdje je x_0 dato, $u_t \in U$ (1)

gdje je g data funkcija. Na taj način pretpostavljamo da stanje sistema u vremenu t+1 eksplicitno zavisi od vremena t, od stanja x_t u prethodnom periodu t i od vrijednosti u_t odabrane kontrole u vremenu t. Takve kontrole u_t koje zavise samo od vremena, često se zovu *kontrole otvorene petlje*.

Pretpostavimo da smo izabrali vrijednosti za $u_0, u_1, ..., u_{T-1}$. Tada iz relacije (1) dobijamo $x_1 = g(0,x_0, u_0)$. Pošto je x_1 sada poznato, to su poznati $x_2 = g(1, x_1, u_1)$, $x_3 = g(2, x_2, u_2)$, itd. Na ovaj način relacija (1) može nam poslužiti da izračunamo, sukcesivno ili rekurzivno, vrijednosti ili stanja $x_1, x_2, ..., x_T$ u zavisnosti od početnog stanja, x_0 i vrijednosti, $u_0, ... , u_{T-1}$ odabranih kontrola. Svakom izboru $(u_0, u_1, ... , u_{T-1})$ odgovara niz $(x_1, x_2, ... , x_T)$, npr. put 1 na slici 1. Drugi izbor od $(u_0, u_1, ... , u_{T-1})$ daje drugi put, kao put 2 na istoj slici.



Sl. 1

Različiti putevi će obično imati različitu korisnost ili vrijednost. Pretpostavimo da imamo funkciju f(t, x, u) od tri promjenljive takvu da se korisnost pridružena datom putu prikazuje sumom

$$\sum_{t=0}^{T} f(t, x_t, u_t) \quad (2).$$

Navedena suma (2) se zove funkcija cilja, i ona predstavlja sumu korisnosti (vrijednosti) dobijenih u svakoj tački vremena.

Navedena suma (2) se zove funkcija cilja, i ona predstavlja sumu korisnosti (vrijednosti) dobijenih u svakoj tački vremena. Funkcija cilja ponekad ima oblik

$\sum_{t=0}^{T-1} f(t, x_t, u_t) + S(x_T)$, gdje je S vrijednost

pridružena krajnjem periodu. Vidimo da je ovaj oblik specijalan slučaj oblika (2) u kojem je

$f(T, x_T, u_T) = S(x_T)$. Vrijednost S se često zove krajnja vrijednost funkcije f(t, x,u).

Pretpostavimo da smo izabrali vrijednosti za $u_0, u_1, ..., u_{T-1}, u_T$, iz skupa U. Početno stanje x_0 je dato i, kako je prethodno objašnjeno, relacija (1) daje $x_1, x_2, ..., x_T$. Označimo odgo-varajuće paroveN $(x_1, x_2, ..., x_T)$, $(u_0, u_1, ..., u_T)$ sa $(\{x_t\}\{u_t\})$. Ove parove zovemo dopustivim nizom parova. Za svaki takav niz parova funkcija cilja ima određenu vrijednost. Proučavat ćemo sljedeći problem: $(\{x_t\}\{u_t\})$. treba naći jedan par $(\{\dot{x}_t\}\{\dot{u}_t\})$ za koji će vrijednost funkcije cilja biti što je moguće veća.

Takav nađeni dopustivi par nizova zovemo optimalan par, a odgovarajući niz kontrola $\{\dot{u}_t\}_{t=0}^{T}$ zovemo optimalnom kontrolom. Ukratko formulisano, problem je sljedeći:

Naći

$$\max \sum_{t=0}^{T} f(t,x_t,u_t) \ pod\, uslovom\, da\ je\ x_{t+1} = g(t,x_t,u_t),\ \ x_0\ \ je\, dato,\ \ \ u_t \in U$$

(3)

Primjer 1.

Neka sa x_t označimo bogatstvo neke individue u vremenu t. U svakoj tački vremena t, individua treba da odluči da konzumira neki proporcionalni dio u_t od x_t, ostavljajući proporcionalni dio $1-u_t$ za štednju. Pretpostavimo da bogatstvo donosi neki prihod sa kamatnom stopom $\rho - 1 > 0$

Poslije uzimanja $u_t x_t$ za potrošnju, zaliha bogatstva je $(1 - u_t)x_t$. Uzimajući u obzir kamatnu stopu, ovaj dio će narasti na iznos $x_{t+1} = \rho(1-u_t)x_t$ na početku perioda t + 1. Neka je x_0 pozitivna konstanta, i neka t uzima vrijednosti t = 0, …, T-1.

Pretpostavimo da je $U(t, c_t)$ korisnostod potrošnje $c_t = u_t x_t$, gdje je U(t, c) rastuća i konkavna funkcija po c.Tada je ukupna korisnost svih perioda t = 0, …, T , $\sum_{t=0}^{T} U(t,u_t,x_t)$

Prema tome, individua se suočava sa sljedećim problemom :

Naći

$$\max \sum_{t=0}^{T} U(t,u_t,x_t) \quad pod\ uslovom\ da\ je\ x_{t+1} = \rho(1-u_t)x_t,\ \ t = 0,...,T-1$$

gdje je x_0 dato i $u_t \in [0,1]$ za t = 0, ..., T.

Primijetimo da je ovo standardni dinamički optimizacioni problem o kojem smo govorili ranije.

Primjer 1.

Neka sa x_t označimo bogatstvo neke individue u vremenu t. U svakoj tački vremena t, individua treba da odluči da konzumira neki proporcionalni dio u_t od x_t, ostavljajući proporcionalni dio $1-u_t$ za štednju. Pretpostavimo da bogatstvo donosi neki prihod sa kamatnom stopom $\rho - 1 > 0$. Poslije uzimanja $u_t x_t$ za potrošnju, zaliha bogatstva je $(1 - u_t)x_t$. Uzimajući u obzir kamatnu stopu, ovaj dio će narasti na iznos $x_{t+1} = \rho(1-u_t)x_t$ na početku perioda t + 1. Neka je x_0 pozitivna konstanta, i neka t uzima vrijednosti $t = 0, \dots, T-1$. Pretpostavimo da je $U(t, c_t)$ korisnost od potrošnje $c_t = u_t x_t$, gdje je U(t, c) rastuća i konkavna funkcija po c. Tada je ukupna korisnost svih perioda t = 0, … , T, $\sum_{t=0}^{T} U(t,u_t,x_t)$. Prema tome, individua se suočava sa sljedećim problemom :

Naći

$$\max\sum_{t=0}^{T} U(t,u_t,x_t) \quad pod\ uslovom\ da\ je\ x_{t+1} = \rho(1-u_t)x_t,\ \ t = 0,\dots,T-1$$

gdje je x_0 dato i $u_t \in [0,1]$ za t = 0, ..., T. Primijetimo da je ovo standardni dinamički optimizacioni problem o kojem smo govorili ranije.

1. (Optimalna) vrijednost funkcije i njene osobine

Navest ćemo metod koji se može koristiti i u općim slučajevima.

Pretpostavimo da je u vremenu t = s stanje sistema x neki dati realan broj. Najbolje što možemo da uradimo u ostatku perioda je da izaberemo $u_s, u_{s+1}, \dots, u_T$ (i prema tome također i $x_{s+1}, \dots, x_T$) koji maksimiziraju sumu $\sum_{t=s}^{T} f(t,x_t,u_t)$ *gdje je* $x_s = x$. Definišimo (optimalnu) vrijednost funkcije za problem u vremenu s

$$J_s(x) = \max_{u_s,\dots,u_T \in U} \sum_{t=s}^{T} f(t,x_t,u_t)$$

Navest ćemo metod koji se može koristiti i u općim slučajevima.

Pretpostavimo da je u vremenu t = s stanje sistema x neki dati realan broj. Najbolje što možemo da uradimo u ostatku perioda je da izaberemo $u_s, u_{s+1}, \dots, u_T$ (i prema tome također i $x_{s+1}, \dots, x_T$) koji maksimiziraju sumu $\sum_{t=s}^{T} f(t,x_t,u_t)$ *gdje je* $x_s = x$. Definišimo (optimalnu) vrijednost funkcije za problem u vremenu s

$$J_s(x) = \max_{u_s,\dots,u_T \in U} \sum_{t=s}^{T} f(t,x_t,u_t)$$

(4)

gdje je $x_s = x$ i $x_{t+1} = g(t, x_t, u_t)$ za t > s, $u_t \in U$

(5)

Naravno, pretpostavljamo da maksimum u (4) postoji. To će sigurno vrijediti ako su funkcije f i g neprekidne, a skup U kompaktan, što je najčeće slučaj u primjenama ove teorije.

Kontrole $u_s^*,\dots,u_T^*$ koje maksimiziraju vrijednost u (4) pod u slovom (5) će zavisiti od stanja $x = x_s$, gdje je x_s stanje sistema u vremenu s. Ovakve kontrole koje zavise od stanja sistema u prethodnom vremenu nazivaju se *kontrole zatvorene petlje*, odnosno *povratne kontrole* . (Sjetimo se da smo ,u slučaju otvorene petlje kontrole, $u_0, u_1, \dots, u_T$ odabrali unaprijed, dakle nezavisno od stanja u vremenu s = 0,1, …, T)

Pretpostavimo da smo našli kontrolu $u_s^*(x)$ za svako s = 0, 1, .. ., T. Tada smo stvarno našli rješenje početnog problema (3). Stvarno, pošto je x_0 stanje u vremenu t =0, najbolji izbor od u_0 je $u_0^*(x_0)$. Poslije nalaženja $u_0^*(x_0)$ pomoću diferentne jednačine (1), određujemo odgovarajuće x_1 kao $x_1^* = g(0,x_0,u_0^*(x))$. Tada je $u_1^*(x_1^*)$ najbolji izbor od u_1 i ovaj izbor određuje x_2^* koristeći (1). Tada ponovo, $u_2^*(x_2^*)$ je najbolji izbor od u_2, itd.

Dokazaćemo važnu osobinu vrijednosti funkcije.

Pogledajmo najprije $J_T(x_T)$ koji odgovara posljednjoj vrijednosti T vremena t. Tada suma (4) ima samo jedan član $f(T, x_T, u_T)$ tj. imamo da je

$J_T(x) \overset{def}{=} \max_{u_T \in U} f(T, x_T, u_T)$. Jasno je da u_T koji maksimizira izraz $f(T, x_T, u_T)$ zavisi od x_T. Ako ga označimo sa u_T^*, onda je $u_T^* = u_T^*(x_T)$. Pogledajmo sada pretposljednji $J_{T-1}(x_{T-1})$. Tada suma (4) ima dva člana i izgleda ovako $f(T-1, x_{T-1}, u_{T-1}) + f(T, x_T, u_T)$. Odavde i iz $x_T = g(T-1, x_{T-1}, u_{T-1})$ imamo da ova suma, ustvari, ima oblik $f(T-1, x_{T-1}, u_{T-1}) + f(T, g(T-1, x_{T-1}, u_{T-1}), u_T)$.

Za $J_{T-1}(x_{T-1})$ imamo

$$J_{T-1}(x_{T-1}) = \max_{u_{T-1}, u_T \in U}\left[f(T-1, x_{T-1}, u_{T-1}) + f(T, g(T-1, x_{T-1}, u_{T-1}), u_T)\right]$$

.

Pošto prvi član u uglatoj zagradi ne zavisi od u_T, možemo pisati

$$J_{T-1}(x_{T-1}) = \max_{u_{T-1}, u_T \in U}\left[f(T-1, x_{T-1}, u_{T-1}) + f(T, g(T-1, x_{T-1}, u_{T-1}), u_T)\right] =$$
$$= \max_{u_{T-1} \in U}\max_{u_T \in U}\left[f(T-1, x_{T-1}, u_{T-1}) + f(T, g(T-1, x_{T-1}, u_{T-1}), u_T)\right] = \max_{u_{T-1} \in U} f(T-1, x_{T-1}, u_{T-1}) +$$
$$+ \max_{u_T \in U} f(T, g(T-1, x_{T-1}, u_{T-1}), u_T) = \max_{u_{T-1} \in U}\left[f(T-1, x_{T-1}, u_{T-1}) + J_T(g(T-1, x_{T-1}, u_{T-1})\right]$$

Tako smo dobili

$$J_{T-1}(x_{T-1}) = \max_{u_{T-1} \in U}\left[f(T-1, x_{T-1}, u_{T-1}) + J_T(g(T-1, x_{T-1}, u_{T-1})\right]$$

Ako sada uzmemo za t = T – 2 i ponovimo slična razmišljanja, koristeći posljednju jednakost dobijamo

$$J_{T-2}(x_{T-2}) = \max_{u_{T-2} \in U}\left[f(T-2, x_{T-2}, u_{T-2}) + J_{T-1}(g(T-2, x_{T-2}, u_{T-2})\right]$$

Nastavljajući ovako korak po korak dobijamo da za sve s = 0, 1, …, T, vrijedi

$$J_s(x) = \max_{u \in U}\left[f(s, x, u) + J_{s+1}(g(s, x, u)\right]$$

i $J_T(x) = \max_{u \in U} f(T, x, u)$.

Prema tome dokazali smo sljedeću teoremu:

Teorema 1 (Osnovne jednačine dinamičkog programiranja)

Neka je $J_s(x)$ vrijednost funkcije (4) za problem:

Naći

$$\max \sum_{t=0}^{T} f(t, x_t, u_t) \quad \text{pod uslovom da je } x_{t+1} = g(t, x_t, u_t), \quad u_t \in U$$

(6)

sa datim x_0. Tada $J_s(x)$ zadovoljava jednačine

$$J_s(x) = \max_{u \in U}\left[f(s, x, u) + J_{s+1}(g(s, x, u))\right], \; s = 0, 1, \ldots, T-1$$

(7)

$$J_T(x) = \max_{u \in U} f(T, x, u)$$

(8)

Primjedba 1

Kako se vidi, oznake u teoremi 1 smo pojednostavili: umjesto x_{T-2}, u_{T-2} pisano je x, odnosno u, a umjesto T-2 pisano je s.

Primjedba 2

Teorema 1 se koristi kao rekurentna formula za izračunavanje svih $J_s(x)$, a to je, kao što je ranije re čeno, dovoljno da bi se dobilo rješenje našeg problema.

Primijetimo da se, po ovoj teoremi, pri svakom koraku max traži po jednoj varijabli.

Primjedba 3

Navedena teorema vrijedi kada se „max“ zamjeni sa „min“ u (7) i (8), pošto je traženje maksimuma funkcije f ekvivalentno traženju minimuma funkcije –f.

Primjedba 4

Neka $\chi_t(x_0)$ označava svih mogućih vrijednosti stanja x_t koja su generisana sa diferentnom jednačinom (1), ako polazimo sa stanjem x_0 i tada idemo kroz sve moguće vrijednsti $u_0, \ldots, u_{t-1}$. Naravno potrebno je da J_t bude samo definisano na $\chi_t(x_0)$. Prema tome, kako je rečeno u primjedbi 2, teorema 1 je osnovni alat za rješavanje dinamičkih optimizacionih problema. Ona se upotrebljava kako slijedi: Prvo nađemo funkciju $J_T(x)$ pomoću (8). Maksimalna vrijednost od u zavisi (obično) od x, i nju smo označili $u_T^*(x)$. Sljedeći korak je da pomoću (7) odredimo $J_{T-1}(x)$ i odgovarajuću vrijednost $u_{T-1}^*(x)$. Vraćajući se nazad u oblik (7) odredićemo sve vrijednosti funkcija $J_T(x), \ldots, J_0(x)$ kao i maksimalne vrijednosti $u_T^*(x), \ldots, u_0^*(x)$. Kao što je gore objašnjeno, tako ćemo konstruisati rješenje polaznog optimizacionog problema.

se nazad u oblik (7) odredićemo sve vrijednosti funkcija $J_T(x),...,J_0(x)$ kao i maksimalne vrijednosti $u_T^*(x),...,u_0^*(x)$. Kao što je gore objašnjeno, tako ćemo konstruisati rješenje polaznog optimizacionog problema.

Primjer 2

Upotrebom teoreme 1 riješiti sljedeći problem

Naći max $\sum_{t=0}^{3}(1+x_t-u_t^2)$, pod uslovom da je

$$x_{t+1}=x_t+u_t\ ,\ t=0,1,2,\ \ x_0=0,\ \ u_t\in R$$

Rješenje

Ovdje je T = 3, f(t,x,u) = 1 + x – u^2, g(t,x,u) = x + u. Razmotrimo najprije relaciju (8) pa uočimo da je $J_3(x)$ maksimalna vrijednost od 1 + x – u^2 za $u\in(-\infty,\infty)$. Očigledno da se maksimalna vrijednost postiže za u = 0. Saglasno sa navedenom notacijom, imamo da je

$J_3(x)$ = 1 + x , za $u_3^*(x)\equiv 0$

Za s = 2, funkcija u relaciji (7) čiji maksimum treba tražiti, ima oblik

$$h_2(u)=1+x-u^2+J_3(x+u)=1+x-u^2+(x+u)=2+2x+u-u^2.$$

Lahko se vidi da je funkcija $h_2(u)$ konkavna po u (jer je $h_2''(u)=-2<0$) i da je $h_2'(u)=1-2u=0\ \ za\ \ u=1/2$, što znači da smo našli optimalnu vrijednost za u . Maksimalna vrijednost funkcije $h_2(u)$ je

$$h_2(1/2)=2+2x+1/2-1/4=9/4+2x.$$

Otuda je

$$J_2(x)=9/4+2x,\quad za\quad u_2^*(x)\equiv 1/2$$

.

Za s = 1, funkcija u relaciji (6) čiji maksimum treba tražiti, ima oblik

$$h_1(u)=1+x-u^2+J_2(x+u)=1+x-u^2+9/4+2(x+u)=13/4+3x+2u-u^2.$$

Pošto je h_1 konkavna i $h_1'(u)=2-2u=0$ $za\quad u=1$, maksimalna vrijednost funkcije $h_1(u)$ je $h_1(1)$= 13/4 + 3x + 2 – 1 = 17/4 + 3x, pa je

$$J_1(x)=17/4+3x,\quad za\quad u_1^*(x)\equiv 1.$$

Na kraju, za s = 0 treba tražiti maksimum funkcije

$$h_0(x)=1+x-u^2+J_1(x+u)=1+x-u^2+17/4+3(x+u)=21/4+4x+3u-u^2.$$

Funkcija h_0 je konkavna i $h_0'(u)=3-2u=0\ za\quad u=3/2$, pa je maksimalna vrijednost funkcije $h_0(u)$ jednaka

$$h_0(3/2)=21/4+4x+9/2-9/4=15/2+4x.$$

Tako je

$$J_0(x)=15/2+4x,\quad za\quad u_0^*(x)\equiv 3/2$$

.

Kako se vidi, u ovom slučaju optimalni izbori kontrola su konstante koje ne zavise od stanja. Odgovarajuće optimalne vrijednosti stanja varijabli su $x_1 = x_0 + u_0$ = 3/2, $x_2 = x_1 + u_1$ =5/2, $x_3 = x_2 + u_2$ = 5/2 + ½ = 3. Za o ve vrijednosti stanja i kontrola, maksimalna vrijednost funkcije cilja je 7.5.

Navedimo drugo alternativno rješenje.

U jednostavnijem slučaju kao što je ovaj, dinamički optimizacioni problem može se riješiti sasvim lahko upotrebom uobičajnih metoda kalkulusa. Stavljajući za t = 0,1 i 2 u diferentnu jednačinu $x_{t+1} = x_t + u_t$, dobivamo

$x_1= x_0 + u_0= u_0$, $x_2 = x_1 + u_1 = u_0 + u_1$, i $x_3 = x_2+u_2=u_0+u_1+u_2$. Upotrebom ovog rezultata funkcija cilja postaje funkcija od u_0 , u_1 , u_2 i u_3:

$$I=(1-u_0^2)+(1+u_0-u_1^2)+(1+u_0+u_1-u_2^2)+(1+u_0+u_1+u_2-u_3^2)=4+3u_0-u_0^2+2u_1-$$
$$+u_2-u_2^2-u_3^2$$

Problem s e sastoji u tome da treba maksimizirati funkciju I u odnosu na kontrolne varijable u_0, u_1, u_2 i u_3. Vidimo da je funkcija I suma konkavnih funkcija, pa je kao takva također konkavna. Otuda će stacionarna tačka ma ksimizirati funkciju I . Prve parcijalne derivacije funkcije I su

$$\frac{\partial I}{\partial u_0}=3-2u_0,\quad \frac{\partial I}{\partial u_1}=2-2u_1,\quad \frac{\partial I}{\partial u_2}=1-2u_2,\quad \frac{\partial I}{\partial u_3}=-2u_3$$

.

Izjednjačavajući parcijalne derivacije sa nulom dobivamo jednu jedinu stacionarnu tačku

$(u_0,u_1,u_2,u_3)=(3/2,1,1/2,0)$ koja je rješenje problema, koje je isto kao što smo dobili upotrebom teoreme 1.

U principu, svi konačno dimenzionalni dinamički problemi mogu se riješiti upotrebom običnog kalkulusa, ali metod postaje neprimjenljiv ako je horizont T velik.

Posmatrat ćemo sljedeći primjer u kojem je konačno vrijeme proizvoljan dati prirodan broj i optimalne kontrole zavise od stanja sistema.

Primjer 3

Neka x_t označava vrijednost imovine investitora u periodu t, a u_t potrošnju u toku perioda t. Pretpostavimo da je imovina u periodu t + 1 proporcionalna štednji $x_t - u_t$ u periodu t, sa faktorom proporcionalnosti koji zavisi od t, tj.

$x_{t+1} = a_t(x_t - u_t)$, a_t su dati pozitivni brojevi.

Pretpostavimo da je početna imovina, x_0, pozitivna. Pretpostavimo da je korist pridružena potrošnji na nivou u za vrijeme jednog perioda jednaka $u^{1-\gamma}$, dok je korist od imovine na kraju perioda T jednaka $Ax_T^{1-\gamma}$. Ovdje je A pozitivna konstanta i $\gamma \in (0,1)$.

Investitor želi da maksimizira diskontnu vrijednost sume korisnosti od potrošnje I krajnje imovine.

Definišimo $\beta = 1/(1+r)$, gdje je r diskontna stopa. Pretpostavimo da nije dopušteno posuđivanje, tj. neka je $0 < u_t < x_t$. Problem investitora je :

Naći $\max\left[\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t u_t^{1-\gamma} + \beta A x_T^{1-\gamma}\right]$, pod uslovom da je $x_{t+1} = a_t(x_t - u_t), \quad u_t \in (0, x_t)$

(9)

Rješenje

Ovdje oblast kontrole zavisi od (t,x), pa je U(t,x) = (0,x). Teoremu 1 možemo primjeniti na ovaj problem. Vidimo da je funkcija korisnosti $f(t,x,u) = \beta^t u^{1-\gamma}$ *za* $t = 0,1,\ldots,T-1$, dok je $f(T,x,u) = \beta^T A x^{1-\gamma}$.

Pošto ova funkcija ne zavisi od promjenljive u, iz relacije (8) imamo

$$J_T(x) = \max_{u \in (0,x)} \beta^T A x^{1-\gamma} = \beta^T A x^{1-\gamma}$$

(10)

gdje je bilo koje u_T u (0,x) optimalno. Međutim, iz jednačine (7) imamo

$$J_s(x) = \max_{u \in (0,x)} \left[\beta^s u^{1-\gamma} + J_{s+1}(a_s(x-u))\right]$$

(11).

Specijalno, iz relacije (10) dobivamo $J_T(a_{T-1}(x-u)) = \beta^T A a_{T-1}^{1-\gamma}(x-u)^{1-\gamma}$, pa je

$$J_{T-1}(x) = \beta^{T-1} \max_{u \in (0,x)} \left[u^{1-\gamma} + \beta A a_{T-1}^{1-\gamma}(x-u)^{1-\gamma}\right]$$

(12).

Stavimo da je $g(u) = u^{1-\gamma} + \beta A a_{T-1}^{1-\gamma}(x-u)^{1-\gamma}$ za u iz (0,x).

Izračunavanjem $g'(u)$ i rješavajući jednačinu $g'(u) = 0$ po u dobivamo da je

$$u_{T-1} = u = \frac{x}{C_{T-1}^{1/\gamma}}$$, gdje je

$C_{T-1}^{1/\gamma} = 1 + (\beta A a_{T-1}^{1-\gamma})^{1/\gamma}$ (13).

Pošto je $\gamma \in (0,1)$ i $\beta A a_{T-1}^{1-\gamma} > 0$, funkcija g je konkavna nad intervalom (0,x). Prema tome, vrijednost za u dato relacijom (13) maksimizira funkciju g(u). Njena maksimalna vrijednost iznosi

$$g\left(\frac{x}{C_{T-1}^{1/\gamma}}\right) = x^{1-\gamma} C_{T-1}^{(\gamma-1)/\gamma} + \beta A a_{T-1}^{1-\gamma}\left(x - \frac{x}{C_{T-1}^{1/\gamma}}\right)^{-\gamma}$$

1

$$= x^{1-\gamma} C_{T-1}^{(\gamma-1)/\gamma} + x^{1-\gamma}(C_{T-1}^{1/\gamma} - 1)^{\gamma} \frac{(C_{T-1}^{1/\gamma} - 1)^{1-\gamma}}{C_{T-1}^{(1-\gamma)/\gamma}}$$

$$= x^{1-\gamma} C_{T \quad 1}$$

Odavde i na osnovu relacije (12), imamo

$J_{T-1}(x) = \beta^{T-1} C_{T-1} x^{1-\gamma}$ (14).

Uočimo da $J_{T-1}(x)$ ima isti oblik kao $J_T(x)$. Nastavljajući dalje sa supstitucijom za s = T-2 u (11) dobivamo:

$$J_{T-2}(x) = \beta^{T-2} \max_{u \in (0,x)} \left[u^{1-\gamma} + \beta C_{T-1} a_{T-2}^{1-\gamma}(x-u)^{1-\gamma}\right]$$

Upoređujući ovo sa relacijom (12) , vidimo da se maksimalna vrijednost postiže za

$$u_{T-2} = u = \frac{x}{C_{T-2}^{1/\gamma}}$$, gdje je

$C_{T-2}^{1/\gamma} = 1 + (\beta C_{T-1} a_{T-2}^{1-\gamma})^{1/\gamma}$

i da je $J_{T-2}(x) = \beta^{T-1} C_{T-2} x^{1-\gamma}$.

Ponavljajući isti postupak vraćajući se nazad, dobit ćemo da je za svako t

$J_t(x) = \beta^t C_t x^{1-\gamma}$ (15)

Iz (10) imamo da je $C_T = A$, dok je C_t za t < T određeno rekurzivno po sljedećoj linearnoj diferentnoj jednačini prvog reda po $C_t^{1/\gamma}$:

$$C_t^{1/\gamma} = 1 + \left(\beta C_{t+1} a_t^{1-\gamma}\right)^{/\gamma} = 1 + (\beta a_t^{1-\gamma})^{1/\gamma} C_{t+1}^{1/\gamma}$$ (16).

Optimalna kontrola je

$$u_t^*(x) = \frac{x}{C_t^{1/\gamma}}, \quad t < T \quad (17).$$

Sukcesivnim ubacivanjem $u_0^*, u_1^*, \ldots$ u diferentnu jednačinu (9) za x_t nalazimo optimalan put, a time i maksimalnu vrijednost funkcije cilja.

Pretpostavimo da je $a_t = a$ za sve t. Tada se diferentna jednačina prvog reda (16) reducira na

$$C_{t+1}^{1/\gamma} - \frac{1}{\omega} C_t^{1/\gamma} = -\frac{1}{\omega}, \text{ gdje je}$$

$\omega = \beta^{1/\gamma} a^{1/\gamma - 1}$ (18).

Ovo je linearna diferentna jednačina prvog reda sa konstantnim koeficijentima. Uzimajući da je $C_T = A$, i rješavajući jedačinu po $C_t^{1/\gamma}$, dobijamo da je

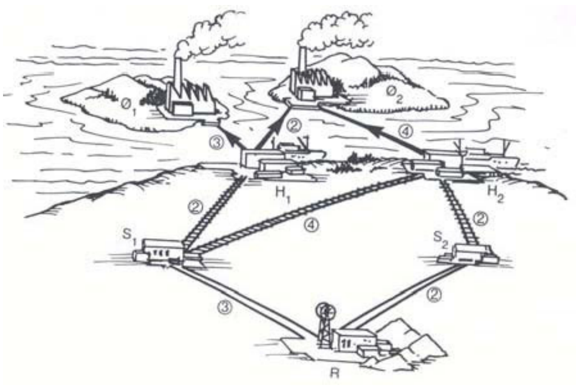
$$C_t^{1/\gamma} = A^{1/\gamma}\omega^{T-1} + \frac{1-\omega^{T-1}}{1-\omega}, \text{ t = T, T-1, ..., 0.}$$

Upotrebom teoreme 1 riješimo jedan transportni problem.

Primjer 4

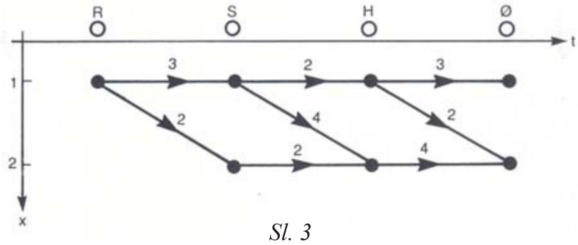
Jednu fabriku treba izgraditi na jednom od dvaju ostrva . Fabrika zahtijeva da se resurs kojeg ona koristi prevozi autom od nalazišta resursa R do jedne od dvaju stanica S1 i S2. Dalje se resurs mora prevoziti vozom do jedne od luka H1, odnosno H2 i na kraju brodom do izabranog ostrva. Troškovi transporta po jedinici resursa navedeni su sa brojem u unutrašnjosti kružnice posmatrane slike 2. Gdje bi se trebala fabrika izgraditi da bi minimizirali troškove transporta resursa?

Rješenje



Sl. 2

Prikažimo problem šemom na slici 3.



Sl. 3

U vremenskoj tački 1, vrijednost x1 znači da se nalazimo na jednoj od dvije stanice. U vremenskoj tački 2, vrijednost x2 znači da se nalazimo u jednoj od dvije luke, dok u vremenskoj tački 3, x3 znači da se nalazimo na jednom od dva ostrva. x0 je dato kao 1 sa vremenskom tačkom t = 0, koja pokazuje da mi polazimo od datog resursa.

Što se tiče kontrola, pretpostavimo također da imaju dvije vrijednosti. Kad smo kod resursa, vrijednost kontrole 1 dovodi nas do stanice br. 1, a vrijednost kontrole 2 dovodi nas do stanice br. 2. Ako smo na stanici br. 1 ili u luci br. 1, vrijednost 1 za kontrolu znači da idemo do luke ili ostrva br. 1, dok vrijednost 2 za kontrolu znači da idemo do luke ili ostrva br. 2. Ako smo u stanici ili luci br. 2, obe kontrole 1 i 2 dovode nas do luke ili ostrva br. 2.

Vidjet ćemo sada da je stanje vezano sa kontrolom diferentnom jednačinom:

$$x_{t+1} = g(t, x_t, u_t).$$

Navedenu funkciju g možemo opisati tabelom

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} u=1 & u=2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x=1 \\ x=2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

koja se čita na sljedeći način: Neka je t = 1. (Tada smo u jednoj od stanica.) Ako je x1 = 1 i u1 = 1, tada nalazimo da je vrijednost od $g(1,x_1,u_1) = g(1,1,1) = 1$ u mjestu (1,1) u tabeli. Ovo znači kada smo u stanici br. 1 i upotrebljavamo kontrolu $u_1 = 1$, tada dolazimo do luke br. 1. Na odgovarajući način je $g(1,1,2) = 2$, $g(1,2,1) = 2$ i $g(1,2,2) = 2$.

Pretpostavimo da je t = 2. Sa iste tabele imamo da je $g(2,1,1)= 1$, $g(2,1,2) = 2$, $g(2,2,1) = 2$ i $g(2,2,2) = 2$.

Za t = 0 samo je prva linija u tabeli aktuelna, i $g(0,1,1) = 1$, $g(0,1,2) = 2$.

Na osnovu podataka u zadatku nalazimo da su vrijednosti funkcije troškova $f(t, x_t, u_t)$ dati sa

$$f(0,1,1) = 3, \quad f(0,1,2) = 2$$

$$f(1,1,1) = 2, \quad f(1,1,2) = 4, \quad f(1,2,1) = f(1,2,2) = 2$$

$$f(2,1,1) = 3, \quad f(2,1,2) = 2, \quad f(2,2,1) = f(2,2,2) = 4$$

Sada se problem može formulisati na sljedeći način:

Naći

$$\min_{u_t} \sum_{t=0}^{2} f(t,x_t,u_t) \; kada \quad je \quad x_{t+1} = g(t,x_t,u_t), \quad t = 0,1,2 \;\; gdje\; je\; u_t \in \{1,2\}\, i\; x_0 = 1.$$

Problem možemo riješiti na sljedeći način: Možemo uzeti sve moguće vrijednosti od u_0, u_1 i u_2 (ima ih ukupno 8) , pa naći odgovarajuće vrijednosti za x_1, x_2 i x_3 i tada izračunamo sumu $\sum_{t=0}^{2} f(t,x_t,u_t)$. Npr. neka je $u_0 = u_1 = u_2 = 1$, tada nalazimo da je $x_1 = x_2 = 1$ pa u ovom slučaju suma iznosi

$f(0,x_0,u_0) + f(1,x_1,u_1) + f(2,x_2,u_2) = f(0,1,1) + f(1,1,1) + f(2,1,1) = 3 + 2 + 3 = 8.$

Izbor od *u* koji daje najmanj u sumu rješava problem.

Uzimajući sve moguće vrijednosti za u_0, u_1, i u_2 , doći ćemo do vrijednosti za x_1 i x_2, a time do najmanje sume, što je rješenje problema. Za veće probleme ova metoda će voditi do nemogućih izračunavanja, pa je u takvim slučajevima nepraktična.

Pogledajmo kako se ovaj problem može riješiti upotrebom teoreme 1.

Najprije treba naći

$$J_2(1) = \min_{u_2 \in \{1,2\}} f(2,1,u_2) = \min_{u_2 \in \{1,2\}} \begin{cases} f(2,1,1) = 3 \\ f(2,1,2) = 2 \end{cases}$$

$$= \min\{3,2\} = 2$$

. Odavde zaključujemo da je $u_2^*(1) = 2$. Na gotovo isti način nalazimo da je $J_2(2) = 4$, gdje je $u_2^*(2) = 1$ ili 2

Upotrebom relacije (6) dobivamo dalje da je

$$J_1(1) = \min_{u_1 \in \{1,2\}} \{f(1,1,u_1) + J_2(g(1,1,u_1))\} =$$

$$\min\{f(1,1,1) + J_2(g(1,1,1)), f(1,1,2) + J_2(g(1,1,2))\}$$

$$= \min\{2 + J_2(1), 4 + J_2(2)\} = \min\{2 + 2, 4 + 4\} = 4$$

$$gdje \;\; je \;\; u_1^*(1) = 1 \; optim.\, vrijednost$$

Dalje nalazimo da je

$$J_1(2) = \min\{f(1,2,1) + J_2(g(1,2,1)), f(1,2,2) + J_2(g(1,2,2))\} = \min\{2 + J_2(2), 2 + J_2(2)\} =$$

$$= \min\{2 + 4, 2 + 4\} = 6 \quad gdje \;\; je \;\; u_1^*(2) = 1 \; ili \; 2.$$

Konačno dobivamo da je

$$J_0(1) = \min\{f(0,1,1) + J_1(g(0,1,1)), f(0,1,2) + J_1(g(1,2,2))\} = \min\{3 + 4, 2 + 6\} = 7$$

$$gdje \;\; je \;\; u_0^*(1) = 1.$$

Prema tome našli smo vrijednosti za kontrole:

$$u_0^*(1) = 1,\; u_1^*(1) = 1,\; u_1^*(2) = 1 \; ili \; 2,\; u_2^*(1) = 2$$
$$i \quad u_2^*(2) = 1$$

Nađimo vrijednosti za x_1, x_2 i x_3 koristeći jednačinu $x_{t+1} = g(t,x_t,u_t)$.

Za t = 0, 1 i 2 imamo $x_1 = g(0, x_0, u_0) = g(0, 1, 1) = 1$, $x_2 = g(1, x_1, u_1) = g(1,1,1) = 1$ i $x_3 = g(2, x_2, u_2) = g(2,2,1) = 2$.

Vrijednost odgovarajuće funkcije cilja tj. sume je:

$$\sum_{t=0}^{2} f(t,x_t,u_t) = f(0,x_0,u_0) + f(1,x_1,u_1) + f(2,x_2,u_2) =$$
$$f(0,1,1) + f(1,1,1) + f(2,1,2) = 3 + 2$$

Za t = 0,1 i 2 možemo dobiti druge vrijednosti za x_1, x_2 i x_3

$x_1 = g(0, x_0, u_0) = g(0, 1, 2) = 2$, $x_2 = g(1,x_1, u_1) = g(1,1,2) = 2$ i $x_3 = g(2, x_2, u_2) = g(2,2,2) = 2$.

Odgovarajuća vrijednost sume je:

$$\sum_{t=0}^{2} f(t,x_t,u_t) = f(0,x_0,u_0) + f(1,x_1,u_1) + f(2,x_2,u_2) = f(0,1,1) + f(1,1,2) + f(2,2,2) = 3 + 4 + 4 = 11$$

Pošto se radi o problemu minimuma, to je rješenje problema pretposljednja suma koja predstavlja minimalne troškove koji u ovom slučaju iznose 7.

Prema tome zaključujemo da je najbolje rješenje problema da se izvrši prevoz resursa do stanice 1, dalje do luke br. 1 i dalje do ostrva br. 2. Znači, fabriku treba izgraditi na ostrvu br. 2 Ukupni troškovi u tom slučaju, kako smo naveli, će biti 7.

Zaključak

U radu se testira fundamentalna teorema za rješavanje dinamičkih optimizacionih problema koji se opisuju sa diskretnim varijablama. Posebno, teorema se testira na jednom transportnom problemu.

Literatura

1. Chipman, J. S. (1950): „Ehe multisector multiplier“, Econometrica, 18.
2. Simon, C. P., L. Blume (1994): Mathematics for Economists, Norton & Company, New York – London.
3. Sydsaeter, K., P. Hammond, A. Seierstad, A. Strom (2005), Further Mathematics for Economic Analysis, Prentice Hall Financial Times.
4. Sydsater, K., J. P. Hammond (1995), Mathematics for Economic Analysis, Pretince Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
5. Sydsaeter, K., S. Atle, S. Arne (1994), Matematisk analyse, bind II, Universitetsferlaget, 3. opplag, Oslo.