

MATEMATIČKO STATISTIČKI PRISTUP TROŠKOVIMA

MATHEMATICAL STATISTICAL APPROACH TO COSTS

Branka Marković*

Marinko Markić*

APSTRAKT

Razvoj ekonomije, u novije vrijeme, vezan je za primjenu matematičko – statističkih metoda. Napuštaju se čisto matematičke metode, a sve se više koriste kvantitativne metode u istraživanjima. Ovakav preokret u korištenju metoda ima za posljedicu ubrzan razvoj prirodnih i društvenih nauka. Pri rješavanju problema i donošenju konačne odluke, veliki broj faktora utiče na krajnji rezultat, posredno ili neposredno. Zbog svih faktora mora se uzeti u obzir i kvantitativna analiza. Postoji podjela među istraživačima, kojoj disciplini u ekonometrijskom istraživanju dati veći značaj. U jednom dijelu daje se veći značaj matematičkim modelima a u drugom dijelu statističko-teorijskim modelima. Korištenjem matematičkih modela u ekonomiji nije upotpunosti prihvaćen, zbog toga, što pri korištenju matematičkih modela, prethodno je potrebno, ne samo dobro poznavanje osnova matematike, nego dobro poznavanje njenih disciplina.

Ključne riječi: metode, funkcija, trošak, ukupni, granični, prosječni

ABSTRACT

The development of economics has recently been linked to the application of mathematical-statistical methods. General mathematical methods are being abandoned whereas quantitative methods are being increasingly used in research. An obvious shift in the use of methods has the consequence of accelerated development of natural and social sciences. Solving the problem and making a final decision, a large number of factors influence the final

* - American Northwest University Travnik

result, either directly or indirectly. Due to all factors, a quantitative analysis has to be considered. There is a greater significance among the researchers, which are disciplined in econometric research. In the first part the focus is on mathematical models and the second part is based on statistical-theoretical models. Using mathematical models in the economy is not fully accepted, therefore, when using mathematical models, a good knowledge of mathematics is not the only condition, a good background of its disciplines is essential as well.

Keywords: methods, function, cost, total, marginal, average

UVOD

Pojave u ekonomiji imaju stohastički karakter, što znači da između pojava postoji određena zavisnost. Postojanje veza između, pojava i njihovu jačinu, ekonomija rješava korištenjem statističkih metoda regresije i korelacije. Ekonomske zakonitosti su određene matematičkim modelima na čiji razvoj je imao veliki uticaj regresijski model. Međuzavisnost ekonomskih pojava se utvrđuje funkcijskim relacijama, što ukazuje na korištenje matematičkih modela u praktičnom i teorijskom istraživanju.

Primjena matematičko-statističkih metoda je veoma značajna. U ekonomiji se uvijek donose odluke izborom između više alternativa, taj izbor je moguć korištenje različitih matematičko-statističkih metoda. Razvojem matematičkih metoda moguće je riješiti problem i donijeti odluku i uz osnovno matematičko znanje, ali uz poznavanje kvantitativnih metoda taj problem je mnogo lakše riješiti. Korištenjem jedinstvenih

metematičko-statističkih metoda dolazi se do prekretnice u metodičkom razmišljanju o problemu. Pomoću tih metoda, na najbolji način ostvaruje se metodički pristup od uočavanja problema do njegovog rješavanja.

METODE ANALIZE TROŠKOVA

Metode analize troškova mogu se podijeliti u dvije grupe:

- Metode koje se baziraju na funkcionalnoj relaciji i troškove prikazuju u obliku matematičke funkcije
- Metode koje se baziraju na konstrukciji modela na bazi utvrđivanja međuzavisnosti troškova i obima proizvodnje

Analiza troškova predstavlja niz vještina, iskustva i znanja korištenja matematičko-statističkih metoda. Analizom troškova omogućena je trajna likvidnost, profitabilnost poslovanja. Svaki trošak, može biti prihvatljiv, ukoliko stvara dugoročnu korist. Troškovi koji nastaju pri poslovanju, moraju se sagledati u širem smislu, oni se moraju predvidjeti i odrediti im se pravci djelovanja. Pri tom je potrebno utvrditi alternative sa kojim se može vršiti poređenje pri donošenju odluka. Prva grupa metoda ima matematičko-statistički karakter. One polaze od povezanosti troškova i proizvodnje i analiziraju odnose između ukupnih, prosječnih i graničnih troškova.

UKUPNI, PROSJEČNI I GRANIČNI ROŠKOVI

Ukupni troškovi (TC-Total Costs) predstavljaju najniža ukupna izdvajanja koja su potrebna za proizvodnju određene količine proizvoda. Ukupne troškove čine fiksni troškovi (TFC-Total Fixed Costs) i ukupni varijabilni troškovi (TVC-Total Variable Costs)

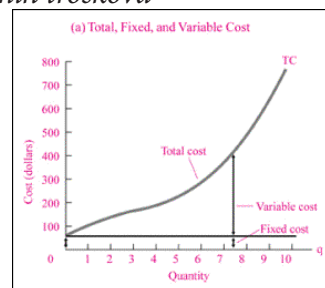
$$TC = TFC + TVC$$

Sa promjenama obima proizvodnje mijenjaju se troškovi, a tako nastale troškove zovemo

varijabilnim troškov. Varijabilni troškovi rastu sa povećanjem proizvodnje, a njenim smanjenjem oni opadaju

$$TVC = TC - TFC$$

Grafikon br. 1: Prikaz ukupnih, fiksnih i varijabilnih troškova



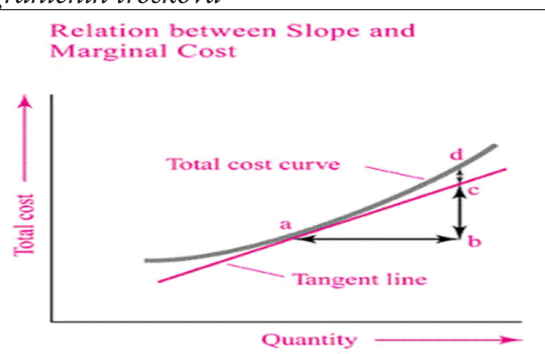
Izvor: Principles of economics N.Gregory Mankiw, Mate doo Zagreb, 2006

Granični troškovi (MC-Marginal Costs) su troškovi koji se definišu kao troškovi nastali proizvodnjom dodatnih jedinica. Predstavlja odnos promjene ukupnih troškova i promjene ukupnog outputa

$$MC = (\text{promjene } TC) / (\text{promjene } Q)$$

Ujedno, oni predstavljaju i nagib krive TC. Granični troškovi, predstavljeni grafički, imaju oblik slova "U". Na krivulji se mogu uočiti faze degresije do tačke minimuma, u toj tački krivulja ima fazu progresije. Pri kumulativnom sabiranju graničnih troškova dobićemo vrijednost koja je jednaka varijabilnim troškovima.

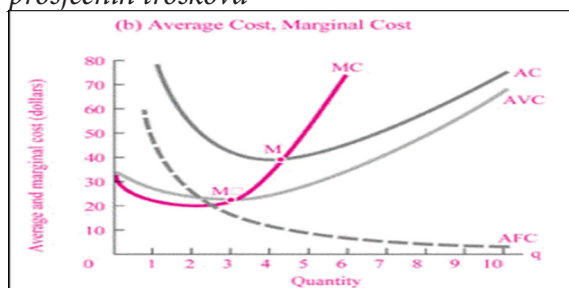
Grafikon br. 2: Odnos između ukupnih i graničnih troškova



Izvor: Principles of economics N.Gregory Mankiw, Mate doo Zagreb, 2006

Kada se ukupni troškovi (TC) podjele sa količinom proizvoda (Q) u nekom vremenskom periodu dobićemo prosječne ukupne troškove (ATC - Average Total Costs). Ove troškove zovemo još i jediničnim troškovima.

Grafikon br. 3: Odnos između graničnih i prosječnih troškova



Izvor: *Principles of economics* N. Gregory Mankiw, Mate doo Zagreb, 2006

FUNKCIJA TROŠKOVA

Svako preduzeće u svom poslovanju želi da ostvari dobit. Do ostvarenja postavljenog cilja moguće je doći dobrom organizacijom. Menadžment preduzeća mora da donese niz strateških odluka u vezi tržišta, troškova, očekivanih prihoda. U tu svrhu se koriste funkcije tražnje. Ukoliko se svaka od funkcija adekvatno kvantitativno analizira, njenom analizom se dolazi do novih saznanja u vezi planiranja, praćenja i optimizacije troškova u preduzeću.

FUNKCIJA UKUPNIH TROŠKOVA

Funkcija ukupnih troškova može se prikazati u obliku funkcija odgovarajućih sistema normalnih jednačina:

1. $F(i) = ax + b$ ($a > 0$; $b > 0$)
2. $F(i) = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$; $c > 0$)
3. $F(i) = ac^{bx}$ odnosno $\ln F(i) = \log a + b \log(1+x)$

Sistem normalnih jednačina za funkciju troškova (1) glasi:

$$\sum F(i) = a \sum x_i + nb$$

$$\sum x_i F(i) = a \sum x_i^2 + b \sum x_i$$

gdje je n broj parova vrijednosti (x_i i F_i)

Za funkciju troškova (2) imamo:

$$\sum F(i) = a \sum x_i^2 + b \sum x_i + nc$$

$$\sum x_i F_i = a \sum x_i^3 + b \sum x_i^2 + \sum x_i$$

$$\sum x_i^2 F_i = a \sum x_i^4 + b \sum x_i^3 + c \sum x_i^2$$

Sistem normalnih jednačina za funkciju troškova (3) glasi:

$$\sum l_n F_i = n l_n a + b \sum x_i$$

$$\sum x_i l_n F_i = l_n a \sum x_i + b \sum x_i^2$$

FUNKCIJA PROSJEČNIH TROŠKOVA

Prosječni troškovi se određuju iz odnosa ukupnih troškova i fizičkog obima proizvodnje. Neka je data funkcija troškova:

$C = F(x)$ i upuni troškovi

$C_0 = F(x_0)$ za proizvodnju x_0

Prosječni troškovi se određuju:

$$\bar{C}_0 = \frac{C_0}{x_0} = \frac{F(x_0)}{x_0} ; x_0 \neq 0,$$

za funkciju troškova

$F(x) = ax + b$ imamo:

$C = (ax + b)/x$ odnosno, $C = a + b/x$, kod linearne funkcije možemo primjetiti da nema minimalnih prosječnih troškova, pošto imamo da je $\lim_{(x \rightarrow \infty)} C = 0$

Ukoliko imamo funkciju troškova prikazanu preko funkcije $F(x) = ax^2 + bx + c$ prosječni troškovi se mogu prikazati pomoću sljedeće formule:

$C = ax + b + c/x$; kod funkcije troškova prikazane $F(x) = ax^2 + bx + c$ minimalni prosječni troškovi su određeni za $x > 0$ za koje je $C' = 0$; $C'' > 0$ tj. $C' = a - 1/x^2$.

Ako imamo funkciju troškova prikazanu pomoću funkcije $F(x) = ac^{bx}$, prosječne troškove prikazujemo kao:

$$C = (ac^{bx})/x$$

Minimalni prosječni troškovi za funkciju $F(x) = ac^{bx}$ su $C_{\min} = 2\sqrt{ac} + b$ pošto je $C'' = \sqrt{a/c} > 0$

FUNKCIJA GRANIČNIH TROŠKOVA

Ako je funkcija troškova $C=F(x)$ definisana za $x=x_i$ u intervalu $(a;b)$ i ako se proizvodnja promjeni za troškovi će se prikazati:

$$\Delta C = F'(x_i + \Delta x) - F(x_i),$$

$$\text{odnos } \frac{\Delta C}{\Delta X} = \frac{F'(x_i + \Delta x) - F(x_i)}{\Delta X}$$

prikazuje porast troškova za jedinicu porasta proizvodnje.

Granični troškovi od $F(x)$ za $x=x_i$ može se definisati kao:

$$C'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F'(x_i + \Delta x) - F(x_i)}{\Delta X}$$

ako postoji granična vrijednost ,možemo pretpostaviti da su granični troškovi jednaki izvodu funkcije troškova za $x=x_i$.

Ako je funkcija troškova $C=F(x_i)$ diferencijalna u intervalu (a,b) ,tada funkcija troškova postoji u tom intervalu i jednaka je izvodu funkcije troškova tj. $C'=F'(x)$

U analizi granični troškovi predstavljaju važan pojam. Oni su izraženi u apsolutnim jedinicama njene promjene troškova na jedinicu porasta proizvodnje.

Ukoliko su prosječni troškovi određeno odnosom $C=c/X$ izvod funkcije

$C'=(c'x-c)/x^2$ ako je $C=0$ u tom slučaju imamo $C_{min}=C'$ pri čemu je:

$$\bar{C}' = \frac{(x''C - 2C')x + 2C}{x^2} > 0$$

jer su sve veličine pozitivne i $x \geq (2C')/(C'')$. Iz ovoga se može zaključiti da su minimalni prosječni troškovi jednaki graničnim troškovima.Ako su granični troškovi manji od minimalnih prosječnih troškova tj. C' kažemo da su oni relativno niski,što znači da se proizvodnja može povećati uz smanjenje prosječnih troškova.Ukoliko imamo slučaj da su granični troškovi veći od minimalnih prosječnih troškova C' , tako da svako povećanje proizvodnje uvećava prosječne i ukupne troškove.Svi ovi kriteriji su vrlo značajni elementi zbog određivanja obima proizvodnje.

Kod upravljanja troškovina, osnovno je da troškovi budu minimalni, a pri tome da se ostvari što bolji finansijski rezultat.

Potrebno je znati do kog nivoa proizvodnje možemo ići a da je ekonomski isplativo.Ako povećavamo iznad optimalne,imamo veće troškove a s tim i manji finansijski rezultat. Ukoliko su granični troškovi viši od prodajne cijene, svaka nova jedinica proizvoda donosi gubitak.Tako, optimalnu proizvodnju ćemo dobiti matematički kao presjek funkcija prodajne cijene i graničnih troškova.Za dokazivanje, navedenog, primjenjuje se matematičko statistički metod najmanjih kvadrata, koja nam omogućava izračun parametara kvadratne funkcije ,koji služe za računanje graničnih troškova za bilo koji obim proizvodnje.

ELASTIČNOST UKUPNIH I PROSJEČNIH TROŠKOVA

Pomoću elastičnosti možemo vršiti međusobno poređenje različitih proizvoda bez obzira na mjernu jedinicu, kojom su izražeme.U tom smislu posmatramo odnos relativnog priraštaja troškova prema relativnom priraštaju proizvodnje:

$$\Delta C/C = \Delta x/x$$

odnos pokazuje relativno povećanje troškova prema relativnom priraštaju proizvodnje.

FUNKCIJA TROŠKOVA VIŠE PROMJENLJIVIH

Možemo pretpostaviti da preduzeće proizvodi K proizvoda $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$, ukoliko sa C označimo ukupne troškove, a sa $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ fizički obim proizvodnje zavisnost troškova od proizvodnje u obliku $C=F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$ nazivamo funkcijom troškova. Troškovi su monotono rastuća funkcija obima proizvodnje.Analitički oblik funkcije troškova može biti različit, ali se najčešće polazi od nekoliko kvantitativnih funkcija.

ZAKLJUČAK

Poseban pristup u ekonomskoj analizi ima "matematička ekonimija" koja se izražava matematičkim simbolima, a zaključak se

donosi pomoću teorema.

Bez obzira o koju djelatnost analiziramo, u toku poslovanja nastaju troškovi, koje možemo podijeliti na ukupne, prosječne i granične troškove. Matematičko-statističkim metodama je prikazan odnos između troškova. Dinamika troškova se prikazuje preko dinamike ukupnih troškova. Ukoliko se ukupni troškovi prikažu pomoću matematičko-statističkih metoda oni predstavljaju rastuću funkciju, a to je posljedica što sadržavaju fiksne i varijabilne troškove. Funkcija ukupnih troškova može biti nelinearna i linearna.

Granični troškovi, se dobiju ukoliko stavimo u odnos priraštaj funkcije sa priraštajem obima proizvodnje (nezavisno promjenljiva), a pri tome obim proizvodnje teži ka nuli. Prikazano matematički ovaj odnos (količnik) predstavlja prvi izvod funkcije ukupnih troškova. Na dinamiku graničnih troškova djeluje degresija i progresija relativno fiksnih troškova, dok na dinamiku prosječnih troškova djeluje degresija i progresija relativno fiksnih troškova i degresija fiksnih troškova. Kao posljedica ovih relacija, granični troškovi sa rastom počinju ukoliko je manji obim proizvodnje u odnosu na prosječne troškove. Granični troškovi se izjednačavaju sa prosječnim zbog bržeg rasta i prelaze iznad prosječnih troškova. Kod obima proizvodnje, gdje su prosječni troškovi minimalni, granični troškovi i prosječni troškovi su isti.

Najveći finansijski rezultat po jedinici proizvoda se ostvaruje pri proizvodnji, kada su prosječni troškovi minimalni. Međutim, svako povećanje obima proizvodnje ne znači povećanje finansijskog rezultata. Matematičko-statistički prikazano, najveći finansijski rezultat, optimalna proizvodnja se dobije izjednačavanjem funkcije prodajne cijene i graničnih troškova. Za utvrđivanje graničnih troškova za bilo koji obim proizvodnje moraju se utvrditi parametri kvadratne funkcije pri čemu se primjenjuje matematičko – statistički metod najmanjih kvadrata.

LITERATURA

- [1] Babić, Š., Uvod u ekonomiku preduzeća, Školsak knjiga Zagreb (1971)
- [2] Carbaugh, R.J., Contemporary Economics, An Applications Approach, South-Western Colege Publishing, Cincinnati, Ohio (2001)
- [3] Jarić, D., Ekonomika preduzeća, Evro (2007)
- [4] Majcen, Ž., Ekonomika OUR, Informator Zagreb (1974)