EKONOMSKA INTERPRETACIJA DUALA KOD LINEARNOG PROGRAMIRANJA

ECONOMIC INTERPRETATION OF DUALS IN LINEAR PROGRAMMING

Branka Marković*
Marinko Markić*

SAŽETAK

Ekonomski procesi u kojim postoje određene pravilnosti tj. zakonitosti o međuovisnostima između procesa, sa jedne strane, i ekonomskih pojava, sa drruge strane, se definišu pomoću kvantitativnih metoda.Te ovisnosti se proučavaju pomoću matematičke i teorijske ekonomije, koji imaju zajednički objekt istraživanja.Matematička ekonomija proučava primjenu matematičkih pojava u ekonomiji, dok teorijska ekonomija prikazuje međuovisnost ekonomskih pojava, njihovu vezu i posljedice koje se mogu utvrditi pomoću matematičkih metoda.

Povezanost između pojava koje analiziramo mogu da se jave u nekoliko oblika.Kod teorijske i matematičke ekonomije najviši oblik veze je funkcionalna veza međuovisnosti.Veza se izražava kvantitativno, predstavljena je matematičkom funkcijom, gdje promjene jedne varijable uslovljavaju tačno promjenu druge varijable i ima dvosmjeran karakter, dok je druga veza stohastička(statistička) kojom se mjeri snaga veze, pri čemu promjena jedne varijable može a i ne mora da znači istu promjenu druge varijable.

Kvantitativne metode ekonomske analize razvile su modeliranje procesa i pojava koje se istražuju.Modeli predstavljaju pojednostavljenu sliku stvarnosti, a pomoću modeliranja se analiziraju određeni procesi na modelima.Pretočeno na matematičke modele, predstavlja mogućnost korištenja sličnosti koja postoji između različitih pojava u pripodi i društvu.Model se definiše kao zatvoreni sistem između pojava kojim se mogu utvrditi ekonomske karakteristike pojava.Modeli sadrže varijable i parametre. Ekonomske kategorije koje se analiziraju u određenim relacijama su varijable ili promjenljive veličine, a jačinu i smjer, međuovisnosti pojava numerički izraženih, predstavljaju parametri.

Istraživanja koja se vrše u bilo kojoj oblasti, a tako i u ekonomiji, moraju da se zasnivaju na prikupljanju statističkih podataka. Ekonometrija,kao multidisciplinarna oblast, bavi se istraživanjem pri čemu koristi metode ekonomske i matematičke statistike, pri tom primjenjuje matematičke modele na realnim kvantitativnim podacima.

Ključe riječi: modeli, programiranje, dualno, varijable

ABSTRACT

Economic processes in which there are certain regularities ie. the principles of interdependence between the processes, on the one hand, and economic phenomena, on the other hand, are defined by means of quantitative methods. These dependencies are studied by the mathematical and theoretical economics, which have a common object of research. The mathematical economics studies the application of mathematical phenomena in economics, while the theoretical economics shows the interdependence of economic phenomena, their relationship and the consequences that can be determined by mathematical methods.

The connection between the phenomena we analyze can occur in several forms. In theoretical and mathematical economics, the highest form of connection is a functional relationship of interdependence. The expression is expressed quantitatively, it is

* - American Northwest University Travnik

represented by a mathematical function, where the changes of one variable conditions the exact change of the other variable and has a two-dimensional character.
Quantitative methods of economic analysis have developed the modeling of processes and phenomena that are being explored. Models represent a simplified image of reality, and by modeling certain processes on models are being analyzed. In the case of mathematical models, it is possible to use the similarity that exists between different phenomena in nature and society. Models are defined as a closed system between phenomena that can determine the economic characteristics of phenomena. The models contain variables and parameters. The economic categories that are analyzed in certain relations are variables or variable sizes, and the intensity and direction, the interdependence of the phenomena numerically expressed, are parameters.
Research carried out in any area, and so in the economy, must be based on the collection of statistical data. Econometrics, as a multidisciplinary field, deals with research using the methods of economic and mathematical statistics, while applying mathematical models to real quantitative data.

Keywords: models, programming, dual, variables

UVOD

Ekonometrija je predstavljena sa metodološkim postupcima koji primjenjuju određene metode, tako da teorijska ekonomija daje predpostavke o postojanju veza između pojava, međuovisnosti između njih preko određenih aksioma, matematička ekonomija, teorijske predpostavke preformuliše u ekonometrijske modele.Da bih mogli ekonometrijski analizirati pojavu, i izvršiti ocjenu parametara modela, potrebni su realni ekonomski podaci za što se koristi ekonomska statistika.Ekonometrija u svom israživanju koristi matode matematičke statistike, kojim se utvrđuje moguća odstupanja,a koja mogu nastati pri statističkom mjerenju i kao posljedica razlike između stvarnih veza međuovisnosti ekonomskih pojava i onih predpostavljenih.
Ekonometrijski modeli s obzirom na oblik veze tj. međuovisnost pojava dijele se na determinističke i statističke modele. Determinističke modele karakteriše funkcionalna veza, dok ekonometrijske modele stohastička(statistička) veza. Posmatrajući matematičke oblike međuovisnosti ekonomskih pojava, ekonometrijski modeli, se mogu sagledati da dva aspekta:linearni modeli kod kojih su parametri i promjenljive imaju linearan karakter.Tu osobinu linearnosti parametara se dobije zbog jednačina, koje predstavljaju linearnu kombinaciju parametara i promjenljivih. Ukoliko jednačine nemaju linearan karakter, odnos između zavisno i nezavisno promjenljive je nelinearan i potrebno ih je transformisati.
Sa vremenskog aspekta, ekonometrijski modeli, se dijele na statičke i dinamičke,, a s obzirom na broj jednačina poznata je podjela na jednostavne, rekurzivne i simultane.

DEFINIRANJE PROBLEMA

U funkcioniranju poslovnog sistemu, za njegovo normalno razvijanje, neophodno je odluke donositi sistemski, zbog niza poremećaja koji se javljaju unutar tog dinamičkog sistema.Donošenjem određenih odluka utvrđuje se stav prema problemu. Ekomometrijsko istraživanje, pri primjeni kvantitativnih metoda, predstavlja formulaciju i rješenje problema tj. oni su samo podloga za donošenje odluke.Modeli programiranja ili modeli optimiranja predstavljaju posebnu vrstu ekonometrijskih modela, čije je osnovni cilj izabrati određeni skup rješenja za postavljeni problem, a iz tog skupa rješenja izabrati ono koje ima optimalno rješenje.
Linearnim programiranjem se mogu rješiti veliki broj ekonomskih problema, primjenjuje se pri planiranju, a sve u cilju postizanja optimuma.Linearno

programiranje ima važnu osobinu da svakom problemu programiranja odgovara drugi problem, poznat kao dualni problem. Za rješavanje takvog problema linearno programiranje koristi matematički model. Između primarnog i dualnog problema postoji inverzija u pogledu zahtjeva. Ako je kriterijum u primarnom modelu izražen u vidu maksimalnog zahtjeva, onda je u dualnom izražen u vidu minimuma.Kod optimalnih rješenja primarnog problema postoje i optimalna rješenja dualnog problema.

Razmatranje dualnog problema omogućava uspostavljanje veze između linearnog programiranja i teorije pri čemu se otvaraju mogućnosti za rješavanje važnih teorijskih i praktičnih problema.

Linearno programiranje može imati različitu primjenu u zavisnosti od vrste djelatnosti, karakteristika proizvodnje ili predmeta istraživanja.Linearnim programiranjem rješevanju se problemi u kojima se postavljaju zahtjevi da se odredi maksimalna ili minimalna vrijednost jedne veličine pri poznatim ograničavajućim uslovima.Uslovi koji se moraju zadovoljiti da bih problem rješili linearnim programiranjem su :multiplikativnost i aditivnost. U ovisnosti od zahtjeva u proizvodnim procesima se mogu postaviti različiti problemi i mogu se tražiti i različita rješenja, ali sve u dozvoljenim granicama da se ne narušava linearnost. Rješenje koje zadovoljava postavljeni zahtjev predstavlja optimalno rješenje.

Teorija linearnog programiranja se veže oko teorije prioriteta, egzistencije rješenja i svojstva tih rješenja, tz. Principa komplementarne neangažiranosti. Razlikuju se tri tipa problema linearnog programiranja

STANDARDNI PROBLEM LINEARNOG PROGRAMIRANJA

Kod standardnog problema treba se maksimizirati i minimizirati linearna funkcija.Maksimum se definira oblikom od n –varijabli i m - uvjeta (ograničenja):

$$\sum_{i=1}^{n} c_j x_j \text{ uz uvjet:}$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\,,\ i=1,2,3....m$$
$$x_j \ge 0\,;\ j = 1,2,\dots n$$

U matričnoj formi taj problem se postavlja:
Max C´X uz uvjet:
AX≤B
X≥0 gdje su C i B matrice reda (n;1) i (m;1)

Karakteristika standardnog problema kod linearnog programiranja jeste što su uvjeti (ograničenja) izražena u nejednačinama.
Standardnom problemu maksimuma odgovara dual.Dual standardnog problema (1),(2) i (3) je ovaj problem:

$$Min \sum_{i=1}^{m} y_i b_i$$
$$\text{uz uvjet } \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} > c_j \quad j=1,2,.....n$$
$$y_1 \ge 0$$

Ili u matričnoj formi

Min Y´B
Uz uvjet Y´B≥C´
Y≥ 0

Problem maksimuma odgovara problemu minimuma, što se zaključuje da primal ima n varijabli,m ograničenja, dok dual ima m varijabli i n ograničenja.
Kanonski problem u matričnom obliku definira se:

Max C´X
uz uvjet AX=B
X≥0

Kanonski oblik minimuma se definira na isti način zamjenom maksimuma sa minimumom .Za razliku od standarnog problema u kanonskom problemu uvjeti su dati kao jednačina.Standardni i kanonski oblik su ekvivalentni jer se jedan može transformirati sa drugim

OPĆI MODEL LINEARNOG PROGRAMIRANJA

Opći model linearnog programiranja može se javiti kao problem maksimuma i minimuma, dok ograničenja mogu biti bilo kojeg oblika. Uvjeti, za razliku od standarnog, mogu se javiti u obliku „=“ Opći model, napisan u matričnom obliku može se opisati preko:

$$\begin{array}{ll} \text{Max}\rightarrow C'x & \\ \text{uz uvjet } x_j \geq 0; & j \in T \\ A'x \leq b_i; & i \in S \\ A'x = b_i; & i \in C(S) \end{array}$$

Može se napisati i dual općeg problema linearnog programiranja:

$$\begin{array}{l} \text{Min } Y'B \\ \text{uz uvjet } Y'A_j \geq c_j \text{ , j} \in T \\ Y'A_j = c_j \text{ ,j} \in T \\ y_i \geq 0 \text{ , i} \in S \end{array}$$

Svakoj varijabli primala može da se pridruži jedan uvjet duala.

SIMPLEKS METODA KOD LINEARNOG PROGRAMIRANJA

Praktična važnost linearnog programiranja počiva u velikoj mjeri na vanredno efikasnim metodama programiranja.Najvažnija od tih metoda je metoda George Dantziga Danas imamo nekoliko modifikacija tog modela. Najušpješnije metode su:

- Dantzigova vizija
- Charnes – Lamkeova vizija revidirana simpleks metoda

Simpleks metoda rješava probleme linearnog programiranja u nizu uzastopnih interakcija počevši od baz ičnog rješenja pa sve do najbližeg optimalnog rješenja.Algoritam simpleks metode se definiše u četiri koraka:postavka mogućeg rješenja, primjena testa za kontrolu mogućeg rješenja,ukoliko izabrano rješenje nije optimalno metod će dati smjernice do boljeg rješenja, nakon svih procedura dolazi se do optimalnog rješenja. Kod simpleks metode početno rješenje mora zadovoljiti jednačine i uvjet nenegativnosti. Svaki korak teži ka boljem rješenju od prethodnog.Polazi se od baz ičnog rješenja, na temelju optimalnosti istražuje se da li je izabrano rješenje optimalno.Ukoliko je optimalno, postupak se završava.Ako rješenje nije optimalno, simpleks metoda traži novo moguće bazično rješenje koje odgovara tački u kojoj funkcija cilja ima bolju vijednost.Metoda se ponavlja sve dok se ne dobije optimalno rješenje.Metoda se koristi sa kanonskim problemom, pošto se standardni problem može prikazati u ekvivalentnom kanonskom problemu.
Rješavanjem sistema jednačina primjenom metode zamjene,se prikazuje algoritam, a može se prikazati i matričnom metodom, te pomoću simpleks tabele.Simpleks algoritam se može prikazati u kanonskom i općem obliku.

DUALITET

Kod linearnog programiranja postoji osnovni ili primarni i pridruženi ili dualni problem.Svakom osnovnom problemu bilo da je maksimum može da se pridruži problem minimuma .Sa ekonomskog aspekta to bi značilo da se paralelno sa procesom proizvodnje pojavljuje i proces vrednovanja. Ukoliko je cilj maksimalna efikasnost sa proizvodnog procesa posmatrano, tada je dualni problem minimalno ulaganje za datu efikasnost u proizvodnom vrednovanja.

DUALNI ALGORITAM

Svaki problem linearnog programiranja primal ima dualni oblik.Poznavanje relacije između primala i duala ključna je za razumjevanje naprednih tema iz linearnog programiranja a daje interesantne ekonomske poglede kod analize osjetljivosti. Ako je primal problema minimalam njegov dual je maksimalan.Dual općeg problema linearnog programiranja prema definiciji za dati problem linearnog programiranja

$$\begin{array}{l} (max)f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n \\ \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_{2+} \ldots a_{in}x_n \leq b_1 \\ \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \quad \vdots \\ \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n \leq b_m \\ \quad x_1;\ x_2 \ldots x_n \geq 0 \end{array}$$

Dualni problem je:

$$(min)f = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots b_m y_m$$
$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \cdots a_{m1} y_m \geq c_1$$
$$\vdots$$
$$a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \cdots a_{mn} y_m \geq c_n$$
$$y_1; y_2 \dots y_m \geq 0 \dots$$

EKONOMSKA INTERPRETACIJA DUALA-CIJENA U SJENI

Na konkurentnim tržištima cijene odgovaraju cijenama u sjeni. One predstavljaju skriveni društveni granični trošak nekog dobra. Ukoliko tržište nije konkurentno tada tržišne cijene ne pokazuju društvenu vrijendost.
Cijena u sjeni i-tog ograničenja je iznos za koji se povećava f-vrijednost.Ako povećavamo za jedan,ovo predpostavlja da ukoliko izmjenimo i-tog ograničenja na desnoj strani za na tekuća baza i dalje ovdje optimalna. Cijena u sjeni i-tog ograničenja problema maksimuma je optimalna vrijednost i-te dualne varijable.Cijenu u sjeni predstavljaju dualne varijable tako da znamo da će cijena u sjeni za ograničenja oblika biti manja ili biti nenegativna.

y_1;y_2…y_m≥0

Ograničenje oblika bit će nepozitivna, a za ograničenja oblika bit će bez restrikcije u znaku.
Za minimizacijski problem cijene u sjeni i-tog ..ograničenja je iznos za koji jedinična promjena i-tog ograničenja poboljšava ili pogoršava optimalnim f vrijednosti uz predpostavku da tekuća baza ostaje optimalna.
U funkciji cilja duala imamo:

f=b_λ y_λ+b_2 y_2…………b_m y_m

Svaki, možemo interpretirati kao doprinos profita po jedinici resursa i raspoloživih za primarni problem. cijena u sjeni.

ZAKLJUČAK

U poslovanju svakog preduzeća osnovni cilj je ostvarivanje najvećeg profita uz što je moguće niže troškove poslovanja, što znači da bih riješili ovaj problem potrebno je izvršiti optimizaciju.Optimizacije predstavlja maksimiziranje koristi ili minimiziranje troškova uz određena ograničenja koja postoje.Do optimizacije problema dolazi se pomoću linearnog programiranja, a pri čemu rješenja se koriste u procesu odlučivanja. Linearno programiranje proces posmatra preko funkcije cilja .Ta funkcija cilja ima određene uvjete koji se predstavljaju u obliku jednačine/nejednačine.
Kod rješavanja ekonomskih problema, svaki problem mora imati tri osnovne komponente:definiranje funkcije cilja;utvrđivanje ograničenja;izbor optimalnog rješenja, da bi se mogao rješeiti problem pomoću linearnog programiranja.
Korištenjem „dualnog problema" u linearnom programiranju, mogu se rješiti mnogo složeniji problemi koji mogu da imaju nešto veći broj uvjeta.Pošto svakom primarnom modelu tačno odgovara jedan dualni,to se koristi da se pomoću jednostavnih matematičkih modela, dobije osnovni cilj, a to je optimalno rješenje.

LITERATURA

[1] Babić, Z; Modeli i metode poslovnog odlučivanja, Ekonomski fakultet Split,2011

[2] Babić, Z., T. Hunjak (2006): The Use of Multicriteria De Novo Programming in the Production Planning Problem, Proceedings of the11th International Conference on Operational Research KOI

[3] Kiš,T.,Čileg,M.,Vugdelija,D.,Sedlak, O.,Kvantitativni metodi u ekonomiji; Ekonomski fakultet u Subotici, 2005

[4] Zeleny, M (1986): Optimal System Design with Multiple Criteria: De Novo Programming Approach, Engineering Costs and Production Economics